

87. 三角関数を含む方程式④

$$(1) \theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad (2) \theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

$$(3) \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi \quad (4) \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 0 \Leftrightarrow 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi \text{ より}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{6} = \pi, 2\pi$$

$$\text{したがって } \theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

[別解]

両辺を $\cos \theta$ で割って、 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ とおくと

$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } \theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

$$(2) 2(\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{6} \Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{2} \left\{ \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi \text{ より}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{したがって } \theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

$$(3) \sin 2\theta - \cos 2\theta = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left\{ \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 2\theta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{15}{4}\pi \text{ より}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi$$

$$\text{したがって } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

[別解]

$$2\sin\theta\cos\theta - (2\cos^2\theta - 1) = 1$$

$$\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) = 0$$

$$\text{よって } \cos\theta = 0 \text{ または } \sin\theta = \cos\theta$$

$$\text{したがって } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$$



$\sin\theta = \cos\theta$ は、 $\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ と変形して解いてもよいですし、

単位円周上で、 x 座標と y 座標が等しくなる場所（2つある）を考えてもよいです。

$$(4) \cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} < \frac{25}{6}\pi \text{ より}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$$

$$\text{したがって } \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$$