## ８６．三角関数を含む方程式③

| | |
|---|---|
| （1）$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ | （2）$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ |
| （3）$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ | （4）$\theta=0,\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \pi,\ \dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$ |

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

（1）$\sin 2\theta=\cos\theta \iff 2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

$$\iff \cos\theta(2\sin\theta-1)=0$$

よって　$\cos\theta=0$　…①　または　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　…②

①のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$，　②のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

〔別解〕

$\sin 2\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$n\in\mathbb{Z}$ とし，一般角で考えて　$2\theta=\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+2n\pi$　より　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2n\pi}{3}$

$2\theta=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+2n\pi$　より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$

この中で，$0\leqq\theta<2\pi$ にあたるものは　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\alpha=\sin\beta$ のとき，単純に $\alpha=\beta$ とすることはできません。正しくは

$\sin\alpha=\sin\beta \iff \alpha=\beta+2n\pi$（$n\in\mathbb{Z}$）または　$\alpha=\pi-\beta+2n\pi$（$n\in\mathbb{Z}$）

です。

（2）$\cos 2\theta+\cos\theta+1=0 \iff 2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1=0$

$$\iff \cos\theta(2\cos\theta+1)=0$$

よって　$\cos\theta=0$　…①　または　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ …②

①のとき　$\theta=0$，　②のとき　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

したがって　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

（3）$\cos\theta+\cos 3\theta=0 \iff \cos\theta-3\cos\theta+4\cos^3\theta=0$

$$\iff 2\cos^3\theta-\cos\theta=0$$

$$\iff \cos\theta\left(\sqrt{2}\cos\theta+1\right)\left(\sqrt{2}\cos\theta-1\right)=0$$

よって　$\cos\theta=0$　…①　または　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　…②　または　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　…③

①のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$，　②のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$，　③のとき　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

（4）$\sin 3\theta-\sin\theta=\cos 3\theta-\cos\theta \iff 2\cos\dfrac{3\theta+\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta-\theta}{2}=-2\sin\dfrac{3\theta+\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta-\theta}{2}$

$$\iff 2\cos 2\theta\sin\theta=-2\sin 2\theta\sin\theta$$

$$\iff \sin\theta(\sin 2\theta+\cos 2\theta)=0$$

$$\iff \sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\iff \sin\theta\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

よって　$\sin\theta=0$　…①　または　$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$　…②

①のとき　$\theta=0,\ \pi$，

②のとき　$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{17}{4}\pi$　であるから　$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi \iff \theta=\dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$

したがって　$\theta=0,\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \pi,\ \dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$