８５．三角関数を含む方程式②

（1）$\theta=0,\ \pi$　（2）$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \pi$　（3）$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$　（4）$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

（1）$\sin\theta=\tan\theta \iff \sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \iff \sin\theta\cos\theta=\sin\theta \iff \sin\theta(\cos\theta-1)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1,\ -1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta=0$ または $\cos\theta=1$ である。

したがって $\theta=0,\ \pi$ または $\theta=0$

まとめて $\theta=0,\ \pi$

$\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \iff \sin\theta\cos\theta=\sin\theta$ のところは

詳しく書けば $\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \iff$ 「$\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$ かつ $\cos\theta\neq0$」

となりますが，$\cos\theta\neq0$ という条件は $\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ と同値であり，

これはそもそも $\tan\theta$ の定義域に含まれていない θ です。

というわけで $\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \iff \sin\theta\cos\theta=\sin\theta$ としています。

こういうところを意識するのが嫌いな人は，同値変形の記号「⇔」を使わずに

式を続けて並べて書き，必要条件の積み重ねていくこと解を得ればよいでしょう。

その場合，細かいことを言えば，得られた解が与えられた方程式を満たすことを

確認するべきなのでしょうが，確認しなくても突っ込まれることはないと思います。

（2）$2\sin^2\theta-\sin\theta=0 \iff \sin\theta(2\sin\theta-1)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1,\ -1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta=0$ または $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ である。

したがって $\theta=0,\ \pi$ または $\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

まとめて $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \pi$

（3） $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0 \iff 2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta=0$

$\iff -2\cos^2\theta-3\cos\theta+2=0$

$\iff 2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

$\iff (2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

したがって $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

（4） $2\cos^2\theta-3\sin\theta-3=0 \iff 2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta-3=0$

$\iff -2\sin^2\theta-3\sin\theta-1=0$

$\iff 2\sin^2\theta+3\sin\theta+1=0$

$\iff (\sin\theta+1)(2\sin\theta+1)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta=-1$ または $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ である。

したがって $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ または $\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

まとめて $\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$