８２．三角関数の合成①

(1) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$	(2) $2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$	(3) $13\sin(\theta+\alpha)$	(4) $\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

(2) $-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left\{\sin\theta\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$$=2\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

(3) $5\sin\theta+12\cos\theta=13\left(\sin\theta\cdot\dfrac{5}{13}+\cos\theta\cdot\dfrac{12}{13}\right)$

$=13\sin(\theta+\alpha)$　（α は $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$ を満たす角）

(4) $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

$$=\sqrt{3}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

三角関数の合成で行われていることは加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

の右辺の式を左辺の式に変形するということです。

sin へ合成する問題が多いですが，空欄補充式の問題などで，

cos への合成を求められるときもあります。

また，$r\sin\left(\theta+\alpha\right)$ と合成したときの α は，出題者の指示がなければ

$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で求めておくとすっきりします。