８１．和積＆積和の公式

(1)(ｉ) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$　(ii) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$　(iii) $-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$　(iv) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(ｖ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(vi) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)(ｉ) $\frac{\sqrt{3}}{8}$　(ii) 0　(3) $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

次の問いに答えよ。

(1) 次の式の値を求めよ。

(ｉ) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\left\{\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ)\right\} = \frac{1}{2}\left(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ\right) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

(ii) $\cos 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2}\left\{\sin(75^\circ+15^\circ)-\sin(75^\circ-15^\circ)\right\} = \frac{1}{2}\left(\sin 90^\circ - \sin 60^\circ\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(iii) $\sin 37.5^\circ \sin 7.5^\circ = -\frac{1}{2}\left\{\cos(37.5^\circ+7.5^\circ)-\cos(37.5^\circ-7.5^\circ)\right\} = -\frac{1}{2}\left(\cos 45^\circ - \cos 30^\circ\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

(iv) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2} = 2\cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ｖ) $\cos 15^\circ + \cos 105^\circ = 2\cos\frac{15^\circ+105^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ-105^\circ}{2} = 2\cos 60^\circ \cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(vi) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ = -2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2}$　$= -2\sin 60^\circ \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) 次の式の値を求めよ。

(ｉ) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = -\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ - \cos 20^\circ\right)\sin 80^\circ = -\frac{1}{4}\sin 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ \sin 80^\circ$

$$= -\frac{1}{4}\sin 80^\circ + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\sin 80^\circ - \sin(-60^\circ)\right\} = \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(ii) $\cos 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos 130^\circ = 2\cos 60^\circ \cos 50^\circ + \cos 130^\circ = \cos 50^\circ + \cos 130^\circ = 2\cos 90^\circ \cos 40^\circ = 0$

（3）$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos x + \cos 3x = 0$ を解け。

$$\cos x + \cos 3x = 0 \iff 2(\cos 2x)(\cos x) = 0 \iff (\cos 2x)(\cos x) = 0$$

$0 \leqq x < 2\pi$ より　$0 \leqq 2x \leqq 4\pi$　であるから

$2x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$　または　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって　$x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

〔別解〕

$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$　より

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 3x = 0 &\iff \cos x - 3\cos x + 4\cos^3 x = 0\\ &\iff 2\cos^3 x - \cos x = 0\\ &\iff \cos x\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) = 0\\ &\quad\ \cos x = 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって　$x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

和積・積和の公式は，使わないと忘れがちな公式の１つです。

実戦的には加法定理からすぐに作れるので，解くのに時間制限のある受験生でなければ暗記していなくてもよいでしょう。その意味で，次の４つの公式は特に重要です。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$