８０．三角関数の加法定理②

(1) $\dfrac{\pi}{3}$	(2) $\dfrac{\pi}{2}$	(3) $\dfrac{\pi}{4}$	(4) $\dfrac{\pi}{4}$

次の２直線のなす鋭角θを求めよ。

(1) $y=3\sqrt{3}\,x,\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

x軸正方向と $y=3\sqrt{3}\,x,\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ とのなす角を

それぞれ$\alpha,\ \beta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $\tan\alpha=3\sqrt{3}$，$\tan\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\alpha>\tan\beta$ であるから $\alpha>\beta$ であり，

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3\sqrt{3}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+3\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{3}$$

よって $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$ であり $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $x+y=0,\ x-y=0$

$y=-x,\ y=x$ の傾きの積は $(-1)\cdot 1=-1$

よって $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(3) $y=-x,\ y=\left(2-\sqrt{3}\right)x$

x軸正方向と $y=-x,\ y=\left(2-\sqrt{3}\right)x$ とのなす角を

それぞれ$\alpha,\ \beta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $\tan\alpha=-1$，$\tan\beta=2-\sqrt{3}$

$\tan\beta>\tan\alpha$ であるから $\beta>\alpha$ であり，

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)-1}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot 1}=-1$$

よって $\beta-\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$ であり $\theta=\pi-\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{\pi}{4}$

（4）$3x-y-3=0,\ x-2y+4=0$

x軸正方向と $3x-y-3=0,\ x-2y+4=0$ とのなす角を

それぞれ$\alpha,\ \beta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

$\tan\alpha>\tan\beta$ であるから $\alpha>\beta$ であり，

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

よって $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ であり $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

２直線のなす角を tan の加法定理を利用して求めています。

別解としてベクトルの内積を利用して，cos から求めていくこともできます。

「鋭角」を求めることになっている場合は，加法定理の式を最初から $\tan\theta=$ と

表してしまうとθが鈍角として求まってしまいますので，それを避けるために

$\tan(\alpha-\beta)=$ や $\tan(\beta-\alpha)=$ という形で計算しています。