７８．三角関数の相互関係

(1) 本文参照

(2) (ⅰ) $\sin\theta=\dfrac{3}{5},\ \tan\theta=-\dfrac{3}{4}$ または $\sin\theta=-\dfrac{3}{5},\ \tan\theta=\dfrac{3}{4}$ (ⅱ) 10 (ⅲ) $-\dfrac{8}{3}$

次の問いに答えよ。

(1) 次の等式を証明せよ。

(ⅰ) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

(左辺) $=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}=$ (右辺)

(ⅱ) $(1+\sin\theta+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta-\cos\theta)^2=4(1+\sin\theta)$

(左辺) $=\{(1+\sin\theta)+\cos\theta\}^2+\{(1+\sin\theta)-\cos\theta\}^2=2(1+\sin\theta)^2+2\cos^2\theta=2+4\sin\theta+2\sin^2\theta+2\cos^2\theta$

$=4+4\sin\theta=$ (右辺)

(ⅲ) $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

(右辺) $=\dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=$ (左辺)

等式の証明の基本的な方針は

Ａ：左辺（右辺）を変形して右辺（左辺）に等しくなることを示す

Ｂ：左辺・右辺それぞれを別々に変形して等しくなることを示す。

Ｃ：（左辺－右辺）を計算し，０になることを示す。

のいずれかです。複雑な式を簡単にしていく方が計算しやすいでしょう。

(2) 次の値を求めよ。

（ｉ）$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

θ が第２象限にあるとき　$\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$ であるから，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

θ が第３象限にあるとき　$\sin\theta<0$，$\tan\theta>0$ であるから，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

（ii）$\tan\theta=2$ のとき，$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$ の値

$$\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{2}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2}{\cos^2\theta}\quad\cdots（＊）$$

$\tan\theta=2$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+2^2=5$ であるから（＊）$=2\cdot5=10$

sin，cos，tan のうちの１つの値がわかっているとき，残りの値を求める問題です。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ や $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する方法が普通の模範解答ですが，

「sin，cos，tan の各象限ごとの正負」と「２辺の比がわかっている直角三角形」を

利用して求める方が簡単です。

（iii）$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ の値

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\quad\cdots（＊）$$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を２乗し

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ から $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

よって（＊）$=-\dfrac{8}{3}$