７３．円の接線の方程式

(1)(ｉ) $3x-4y+50=0$　(ⅱ) $x+2\sqrt{2}y-9=0$　(ⅲ) $x=-7$　(ⅳ) $3x+4y-43=0$

(ⅴ) $2x-3y+2=0$　(2)(ｉ) $y=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x$　(ⅱ) $x+3y-10=0,\ -3x+y-10=0$

次の問いに答えよ。

(1) 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(ｉ) $x^2+y^2=100$，$\mathrm{P}(-6, 8)$

$-6x+8y=100$ より $3x-4y+50=0$

(ⅱ) $x^2+y^2=9$，$\mathrm{P}\left(1, 2\sqrt{2}\right)$

$x+2\sqrt{2}y=9$ より $x+2\sqrt{2}y-9=0$

(ⅲ) $x^2+y^2=49$，$\mathrm{P}(-7, 0)$

$-7x=49$ より $x=-7$

(ⅳ) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$，$\mathrm{P}(5, 7)$

$(5-2)(x-2)+(7-3)(y-3)=25 \Leftrightarrow 3(x-2)+4(y-3)=25$

$\Leftrightarrow 3x+4y-43=0$

(ⅴ) $x^2+y^2+6x-6y+5=0$，$\mathrm{P}(-1, 0)$

$(x+3)^2+(y-3)^2=13 \Leftrightarrow (-1+3)(x+3)+(0-3)(y-3)=13$

$\Leftrightarrow 2(x+3)-3(y-3)=13$

$\Leftrightarrow 2x-3y+2=0$

(2) 次の点を通り，与えられた円に接する直線の方程式を求めよ。

(ｉ) $(0, 0)$，$x^2+y^2-6x+8=0$

$(x-3)^2+y^2=1$ より，中心 $(3, 0)$，半径 1

原点を通る接線なので，求める接線の式を $y=mx \Leftrightarrow mx-y=0$ とおく。

円の中心と接線との距離は半径に一致するので $\dfrac{|3m-0|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Leftrightarrow |3m|=\sqrt{m^2+1}$

２乗して $9m^2=m^2+1$ より $m=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

よって $y=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x$

（ⅱ）$(-2,\ 4)$，$x^2+y^2=10$

接点を $\mathrm{T}(s,\ t)$ とおくと，接線の方程式は $sx+ty=10$ で，これが $(-2,\ 4)$ を通るとき

$-2s+4t=10 \Leftrightarrow -s+2t=5$ …①

T は円上にあるので，$s^2+t^2=10$ …②

①かつ②を解くと $(s,\ t)=(1,\ 3),\ (-3,\ 1)$

よって求める接線の方程式は

$x+3y=10,\ -3x+y=10 \Leftrightarrow x+3y-10=0,\ -3x+y-10=0$

円の接線の方程式は，円上の点での接線を引く場合の公式を覚えておきましょう。

原点を中心とする円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

$(a,\ b)$ を中心とする円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

形式的には，円の方程式の $x,\ y$ に１ヶ所ずつ $x=x_1$，$y=y_1$ を代入して得られます。