６６．相反方程式

（1） $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$　　（2） $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

次の方程式を解け。

（1） $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$ …（＊）

$x=0$ は解ではない。（＊）を x^2 で割ると

$$x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)=0$$

$x+\dfrac{1}{x}-3=0 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$ より $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$x+\dfrac{1}{x}-4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$ より $x=2\pm\sqrt{3}$

したがって $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$

（2） $x^4-2x^3-5x^2+2x+1=0$ …（＊）

$x=0$ は解ではない。（＊）を x^2 で割ると

$$x^2-2x-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}-3\right)\left(x-\frac{1}{x}+1\right)=0$$

$x-\dfrac{1}{x}-3=0 \Leftrightarrow x^2-3x-1=0$ より $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

$x-\dfrac{1}{x}+1=0 \iff \iff x^2+x-1=0$ より $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

係数が左右対称である方程式を相反（そうはん）方程式といいます。

偶数次の相反方程式は，$x\neq 0$ を確認後，両辺を x で割り，x と $\dfrac{1}{x}$ の対称式を作ります。

奇数次の相反方程式は，$x=-1$ を解にもつことからまず $x+1$ で因数分解します。

その後は，偶数次の相反方程式に帰着されます。