

65. 高次方程式

$$(1) x=1, -\frac{1}{2}, 3 \quad (2) x=2, 3, -1\pm\sqrt{2}i \quad (3) x=1, -1$$

$$(4) x=\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \quad (5) x=1, 2, 3, 4 \quad (6) x=5, \frac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$$

次の方程式を解け。

$$(1) 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 \quad \text{とおくと} \quad f(1) = 0$$

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - 5x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1)(x-3) = 0$$

$$\text{したがって } x=1, -\frac{1}{2}, 3$$

$$(2) x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 18 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 18 \quad \text{とおくと} \quad f(2) = 0$$

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow (x-2)(x^3 - x^2 - 3x - 9) = 0$$

$$g(x) = x^3 - x^2 - 3x - 9 \quad \text{とおくと} \quad g(3) = 0$$

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$\text{したがって } x=2, 3, -1\pm\sqrt{2}i$$

$$(3) x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \quad \text{とおくと} \quad f(1) = 0$$

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow (x-1)(x^3 - x^2 - x + 1) = 0$$

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \quad \text{とおくと} \quad g(1) = 0$$

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow (x-1)^2(x-1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+1) = 0$$

$$\text{したがって } x=1, -1$$

$$(4) 3x^3 - 10x^2 + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 1 \text{ とおくと } f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow (3x-1)(x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$\text{したがって } x = \frac{1}{3}, \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(5) (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 5x + 9) + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 9 + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) = 0$$

$$\text{したがって } x = 1, 2, 3, 4$$

$$(6) (x-1)(x-2)(x-3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdots \textcircled{1}$$

形から $x=5$ が解であることがわかる。

$$\text{よって } \textcircled{1} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 - x + 6) = 0$$

$$\text{したがって } x = 5, \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$$