５２．二項定理

（1）$32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$　（2）$x^7-7x^5+21x^3-35x+\frac{35}{x}-\frac{21}{x^3}+\frac{7}{x^5}-\frac{1}{x^7}$

（3）1024　（4）512

次の問いに答えよ。

（1）$(2x+1)^5$ を展開せよ。

二項定理より $(2x+1)^5={}_5\mathrm{C}_0(2x)^5+{}_5\mathrm{C}_1(2x)^4\cdot 1+{}_5\mathrm{C}_2(2x)^3\cdot 1^2+{}_5\mathrm{C}_3(2x)^2\cdot 1^3+{}_5\mathrm{C}_4 2x\cdot 1^4+{}_5\mathrm{C}_5 1^5$

$=32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$

（2）$\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$ を展開せよ。

二項定理より $\left(x-\frac{1}{x}\right)^7={}_7\mathrm{C}_0x^7+{}_7\mathrm{C}_1x^6\left(-\frac{1}{x}\right)+{}_7\mathrm{C}_2x^5\left(-\frac{1}{x}\right)^2+{}_7\mathrm{C}_3x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^3+{}_7\mathrm{C}_4x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^4$

$+{}_7\mathrm{C}_5x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^5+{}_7\mathrm{C}_6x\left(-\frac{1}{x}\right)^6+{}_7\mathrm{C}_7\left(-\frac{1}{x}\right)^7$

$=x^7-7x^5+21x^3-35x+\frac{35}{x}-\frac{21}{x^3}+\frac{7}{x^5}-\frac{1}{x^7}$

（3）${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$ の値を求めよ。

二項定理より $(1+x)^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0 1^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1 1^9\cdot x+{}_{10}\mathrm{C}_2 1^8\cdot x^2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_9 1\cdot x^9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}x^{10}$

$={}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1x+{}_{10}\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_9x^9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}x^{10}\cdots$①

①に $x=1$ を代入して

${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=2^{10}=1024\cdots$②

（4）${}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9$ の値を求めよ。

(3)の①に $x=-1$ を代入して

${}_{10}\mathrm{C}_0-{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2-\cdots-{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=0\quad\cdots$③

②－③より

$2\left({}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9\right)=1024$

よって ${}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9=512$

二項定理とは

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2} a^2 b^{n-2} + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

という展開公式です。

一般化されているため応用範囲は広いですが，式の意味は掴みづらいかもしれません。

和の記号Σを用いて表せば，$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ となりますが，

${}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ の部分は一般項とよばれます。

(3)，(4)のように，コンビネーションの記号Cがたくさん登場する等式・不等式の

証明には二項定理が欠かせません。