

4 7. 不定方程式②

$$(1) \begin{cases} x = 8 + 17k \\ y = -14 + 30k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(2) \begin{cases} x = 64 + 35k \\ y = 84 + 46k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(3) \begin{cases} x = 228 - 55k \\ y = -48 + 147k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(4) \begin{cases} x = 150 + 73k \\ y = 115 + 56k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

次の方程式を解け。ただし、 x, y は整数とする。

$$(1) 30x + 17y = 2 \quad \cdots (*)$$

$$30 = 17 \times 1 + 13 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$17 = 13 \times 1 + 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$13 = 4 \times 3 + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \times 3 - \textcircled{3} \text{より } 17 \times 3 - 13 \times 4 = -1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \times 4 - \textcircled{4} \text{より } 30 \times 4 - 17 \times 7 = 1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

よって

$$(*) - \textcircled{5} \times 2 \text{より } 30(x-8) + 17(y+14) = 0 \Leftrightarrow 30(x-8) = -17(y+14)$$

30と17は互いに素であるから

$$x-8 = 17k \quad \text{かつ} \quad y+14 = 30k$$

$$\text{よって } \begin{cases} x = 8 + 17k \\ y = -14 + 30k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(2) 46x - 35y = 4 \quad \cdots (*)$$

$$46 = 35 \times 1 + 11 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$35 = 11 \times 3 + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$11 = 5 \times 2 + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \times 5 - \textcircled{3} \text{より } 35 \times 5 - 11 \times 16 = -1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \times 16 - \textcircled{4} \text{より } 46 \times 16 - 35 \times 21 = 1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

よって

$$(*) - \textcircled{5} \times 4 \text{より } 46(x-64) - 35(y-84) = 0 \Leftrightarrow 46(x-64) = 35(y-84)$$

46と35は互いに素であるから

$$x-64 = 35k \quad \text{かつ} \quad y-84 = 46k$$

$$\text{よって } \begin{cases} x = 64 + 35k \\ y = 84 + 46k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(3) 147x + 55y = 6 \cdots (*)$$

$$147 = 55 \times 2 + 37 \cdots ①$$

$$55 = 37 \times 1 + 18 \cdots ②$$

$$37 = 18 \times 2 + 1 \cdots ③$$

$$② \times 2 - ③ \text{より } 55 \times 2 - 37 \times 3 = -1 \cdots ④$$

$$① \times 3 - ④ \text{より } 147 \times 3 - 55 \times 8 = 1 \cdots ⑤$$

よって

$$(*) -⑤ \times 6 \text{より } 147(x-18) + 55(y+48) = 0 \Leftrightarrow 147(x-18) = -55(y+48)$$

147 と 55 は互いに素であるから

$$x-18 = -55k \text{ かつ } y+48 = 147k$$

$$\text{よって } \begin{cases} x = 18 - 55k \\ y = -48 + 147k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(4) 56x - 73y = 5 \cdots (*)$$

$$73 = 56 \times 1 + 17 \cdots ①$$

$$56 = 17 \times 3 + 5 \cdots ②$$

$$17 = 5 \times 3 + 2 \cdots ③$$

$$5 = 2 \times 2 + 1 \cdots ④$$

$$③ \times 2 - ④ \text{より } 17 \times 2 - 5 \times 7 = -1 \cdots ⑤$$

$$② \times 7 - ⑤ \text{より } 56 \times 7 - 17 \times 23 = 1 \cdots ⑥$$

$$① \times 2 \times 3 - ⑥ \text{より } 73 \times 23 - 56 \times 30 = -1 \cdots ⑦$$

$$\text{よって } 56 \times 30 - 73 \times 23 = 1 \cdots ⑦'$$

$$(*) -⑦' \times 5 \text{より}$$

$$56(x-150) - 73(y-115) = 0 \Leftrightarrow 56(x-150) = 73(y-115)$$

56 と 73 は互いに素であるから

$$x-150 = 73k \text{ かつ } y-115 = 56k$$

$$\text{よって } \begin{cases} x = 150 + 73k \\ y = 115 + 56k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$



(2元1次の)不定方程式では解を1組見つけることがポイントとなります。

不定方程式①のような問題では、少し考えれば解を見つかることができそうですが、

不定方程式②では係数の桁数が大きいので簡単には見つかりそうにありません。

そこでユークリッドの互除法を用いています。この方法であれば、解があれば

確実に見つけることができますが、計算が面倒なのも事実です。

実戦的には、ユークリッドの互除法を丸々使わずに係数を少し軽くして

解を見つけてしまう方法も有効です。

例えば (3) $147x+55y=6$ は

$$147x+55y=6 \Leftrightarrow 37x+55(2x+y)=6$$

$$2x+y=z \text{ と (一部を置き換えて) おくと } 37x+55z=6 \Leftrightarrow 37(x+z)+18z=6$$

係数がたいぶ軽くなりましたので、ここで解を見つけてしまうと

$$x+z=6 \text{ かつ } z=-12 \text{ より } x=18, y=-48 \text{ と見つかります}$$

本質的には互除法と同じことなのですが、こちらの方が速いと思います。