

45. 不定方程式

$$(1) \begin{cases} x = -3 + 8k \\ y = 2 - 5k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(2) \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 3 + 7k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(3) \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 4 + 9k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$(4) \begin{cases} x = 7 + 5k \\ y = -3 - 3k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

次の方程式を解け。ただし、 x, y は整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $5x + 8y = 1 \cdots \textcircled{1}$

$x = -3, y = 2$ は解の1つであるから $5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $5(x+3) + 8(y-2) = 0 \Leftrightarrow 5(x+3) = -8(y-2)$

5と8は互いに素であるから

$$\begin{cases} x+3 = 8k \\ y-2 = -5k \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x = -3 + 8k \\ y = 2 - 5k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

(2) $7x - 2y = 1 \cdots \textcircled{1}$

$x = 1, y = 3$ は解の1つであるから $7 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $7(x-1) - 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow 7(x-1) = 2(y-3)$

7と2は互いに素であるから

$$\begin{cases} x-1 = 2k \\ y-3 = 7k \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 3 + 7k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

(3) $9x - 5y = 7 \cdots \textcircled{1}$

$x = 3, y = 4$ は解の1つであるから $9 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 7 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $9(x-3) - 5(y-4) = 0 \Leftrightarrow 9(x-3) = 5(y-4)$

9と5は互いに素であるから

$$\begin{cases} x-3 = 5k \\ y-4 = 9k \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x = 3 + 5k \\ y = 4 + 9k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

(4) $3x + 5y = 6 \cdots \textcircled{1}$

$x = 7, y = -3$ は解の1つであるから $3 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) = 6 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $3(x-7) + 5(y+3) = 0 \Leftrightarrow 3(x-7) = -5(y+3)$

3と5は互いに素であるから

$$\begin{cases} x-7 = 5k \\ y+3 = -3k \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x = 7 + 5k \\ y = -3 - 3k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$