３５．余弦定理

（1）$\mathrm{B}=45^\circ$　　（2）$c=\sqrt{17}$

（3）$c=\sqrt{3}+1,\ \mathrm{B}=45^\circ,\ \mathrm{C}=105^\circ$　または　$c=\sqrt{3}-1,\ \mathrm{B}=135^\circ,\ \mathrm{C}=15^\circ$

次の問いに答えよ。

（1）△ABC において，$a=\sqrt{6},\ b=2\sqrt{3},\ c=3+\sqrt{3}$ のとき，B を求めよ。

余弦定理より

$$\cos\mathrm{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}}=\frac{12+6\sqrt{3}+6-12}{2\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}}=\frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{6\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\mathrm{B}=45^\circ$

（2）△ABC において，$a=\sqrt{2},\ b=3,\ \mathrm{C}=135^\circ$ のとき，c を求めよ。

余弦定理より

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}=\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos135^\circ=17$$

$c>0$ より $c=\sqrt{17}$

（3）△ABC において，$\mathrm{A}=30^\circ,\ a=\sqrt{2},\ b=2$ であるとき，残りの角・辺の大きさをすべて求めよ。

余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2=2^2+c^2-2\cdot2c\cos30^\circ$$

$c^2-2\sqrt{3}c+2=0$ から $c=\sqrt{3}\pm1$

（ｉ）$c=\sqrt{3}+1$ のとき

余弦定理より

$$\cos\mathrm{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2^2}{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ よって $\mathrm{B}=45^\circ$

したがって $\mathrm{C}=180^\circ-(\mathrm{A}+\mathrm{B})=105^\circ$

よって $c=\sqrt{3}+1,\ \mathrm{B}=45^\circ,\ \mathrm{C}=105^\circ$

（ⅱ）$c=\sqrt{3}-1$ のとき

余弦定理より

$$\cos \mathrm{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2^2}{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$ よって $\mathrm{B}=135^\circ$

したがって $\mathrm{C}=180^\circ-(\mathrm{A}+\mathrm{B})=15^\circ$

よって $c=\sqrt{3}-1,\ \mathrm{B}=135^\circ,\ \mathrm{C}=15^\circ$