

## 28. 絶対値記号を含む2次不等式

$$(1) -1 < x < 7 \quad (2) x < -1, 1 < x < 5, 11 < x$$

次の不等式を解け。

$$(1) x^2 - 5x - 2 < 2|x - 1|$$

$$(i) x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ のとき } \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 5x - 2 < 2(x - 1)$$

$$x^2 - 7x < 0$$

$$x(x - 7) < 0 \text{ より } 0 < x < 7$$

$$\textcircled{1} \text{より } 1 \leq x < 7$$

$$(ii) x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ のとき } \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 - 5x - 2 < -2(x - 1)$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x - 4)(x + 1) < 0 \text{ より } -1 < x < 4$$

$$\textcircled{2} \text{より } -1 < x < 1$$

$$(i)(ii) \text{より } -1 < x < 7$$

$$(2) |x^2 - 8x - 3| > 2x + 8$$

$$(i) x^2 - 8x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 - \sqrt{19}, 4 + \sqrt{19} \leq x \text{ のとき } \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 8x - 3 > 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 11 > 0$$

$$(x - 11)(x + 1) > 0 \text{ より } x < -1, 11 < x \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{より } x < -1, 11 < x$$

$$(ii) x^2 - 8x - 3 < 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{19} < x < 4 + \sqrt{19} \text{ のとき } \cdots \textcircled{3}$$

$$-(x^2 - 8x - 3) > 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$(x - 1)(x - 5) < 0 \text{ より } 1 < x < 5 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{かつ} \textcircled{4} \text{より } 1 < x < 5$$

$$(i)(ii) \text{より } x < -1, 1 < x < 5, 11 < x$$

[別解]

(i)  $2x+8 < 0$  すなわち  $x < -4$  のとき

すべての実数  $x$  に対し、 $|x^2 - 8x - 3| > 0$  なので

$|x^2 - 8x - 3| > 2x + 8$  は成り立つ。

よって  $x < -4$

(ii)  $2x+8 \geq 0$  すなわち  $x \geq -4$  のとき

$$|x^2 - 8x - 3| > 2x + 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 3 < -(2x + 8)$$

$$\text{または } 2x + 8 < x^2 - 8x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \text{ または } x^2 - 10x - 11 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 5 \text{ または } x < -1, 11 < x$$

$$x \geq -4 \text{ より } -4 \leq x < -1, 1 < x < 5, 11 < x$$

$$(i)(ii) \text{ より } x < -1, 1 < x < 5, 11 < x$$