

16. 絶対値記号を含む1次方程式・不等式②

$$(1) x = \frac{1}{2} \quad (2) x = -3 \quad (3) x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \quad (4) x < \frac{1}{2} \quad (5) x \leq -3 \quad (6) -\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$$

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x+1|=3x$

(i) $x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ …① のとき

$$x+1=3x \text{ より } x=\frac{1}{2} \text{ これは①を満たす。}$$

(ii) $x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ …② のとき

$$-(x+1)=3x \text{ より } x=-\frac{1}{4}$$

これは②を満たさない。

(i)または(ii)より $x=\frac{1}{2}$



$|x+1|=3$ を $x+1=\pm 3$ として解いたのと同様に
 $|x+1|=3x$ を $x+1=\pm 3x$ としたくなる気持ちはわかりますが、間違いです。
 $3x < 0$ のときは $|x+1|=3x$ を満たす x は存在しないので、
 正しくは「 $3x \geq 0$ かつ $x+1=\pm 3x$ 」となります。
 この処理は絶対値について習熟していないと間違えやすいので、
 右辺に変数 x を含む場合には、解答のように絶対値の中の式の正負で
 場合分けをして解くことをおすすめします。

(2) $|x-3|=-2x$

(i) $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ …① のとき

$$x-3=-2x \text{ より } x=1$$

これは①を満たさない。

(ii) $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ …② のとき

$$-(x-3)=-2x \text{ より } x=-3 \text{ これは②を満たす。}$$

(i)または(ii)より $x=-3$

$$(3) |2x| + |x-2| = 6$$

(i) $x < 0$ …① のとき

$$-2x - (x-2) = 6 \text{ より } x = -\frac{4}{3}$$

これは①を満たす。

(ii) $0 \leq x < 2$ …② のとき

$$2x - (x-2) = 6 \text{ より } x = 4$$

これは②を満たさない。

(iii) $x \geq 2$ …③ のとき

$$2x + x - 2 = 6 \text{ より } x = \frac{8}{3} \text{ これは③を満たす。}$$

(i) または (ii) または (iii) より $x = -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$



他の問題でもそうなのですが、場合分けをする際に境界となる値を
場合分けのどちらに側に含めるかということで悩む人は少なくありません。
結論を言えば、絶対値記号を外す際の境界の値はどちら側に含めても構いません。
ちなみに、両側に含めても間違いではありませんが、
場合分けを重なりのない集合（集合の直和の状態）でやりたい人には嫌われます。

$$(4) |x+1| > 3x$$

(i) $x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ …① のとき

$$x+1 > 3x \text{ より } x < \frac{1}{2} \text{ …②}$$

$$\text{①かつ②より } -1 \leq x < \frac{1}{2}$$

(ii) $x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ …③ のとき

$$-(x+1) > 3x \text{ より } x < -\frac{1}{4} \text{ …④}$$

$$\text{③かつ④より } x < -1$$

(i) または (ii) より $x < \frac{1}{2}$

$$(5) |x-3| \leq -2x$$

(i) $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ …① のとき

$$x-3 \leq -2x \text{ より } x \leq 1 \text{ …②}$$

①かつ②より 解なし

(ii) $x-3 < 0$ すなわち $x < 3$ …③ のとき

$$-(x-3) \leq -2x \text{ より } x \leq -3 \text{ …④}$$

③かつ④より $x \leq -3$

(i)または(ii)より $x \leq -3$



この問題では

・ $-2x < 0$ のときは「解なし」

・ $-2x \geq 0$ のときは「 $-(-2x) \leq x-3 \leq -2x$ 」

となることから、最初から $-(-2x) \leq x-3 \leq -2x$ として解くことも可能です。

(絶対値の式) \leq (変数 x を含む式) の場合には

右辺が負のときは「解なし」となるだけなので、このような解き方が可能です。

しかしながら、これも習熟していないと難しいと思いますので、

解答のように場合分けによって絶対値記号を外していくことをおすすめします。

$$(6) |2x| + |x-2| < 6$$

(i) $x < 0$ …① のとき

$$-2x - (x-2) < 6 \text{ より } x > -\frac{4}{3} \text{ …②}$$

①かつ②より $-\frac{4}{3} < x < 0$

(ii) $0 \leq x < 2$ …③ のとき

$$2x - (x-2) < 6 \text{ より } x < 4 \text{ …④}$$

③かつ④より $0 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ …⑤ のとき

$$2x + x - 2 < 6 \text{ より } x < \frac{8}{3} \text{ …⑥}$$

⑤かつ⑥より $2 \leq x < \frac{8}{3}$

(i)または(ii)または(iii)より $-\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$